

Vektorgeometrie

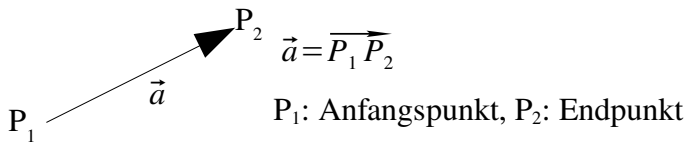
Hanspeter Horlacher

Layout: Tibor Stolz

§1. Einführung

Definition:

Eine Grösse, zu deren Festlegung ausser einer Zahl auch noch die Angabe einer Richtung nötig ist, heisst **VEKTOR**.



Die Länge eines Vektors \vec{a} wird mit $|\vec{a}|$ oder kurz mit a bezeichnet.

$$a = |\vec{a}| = \overline{P_1 P_2}$$

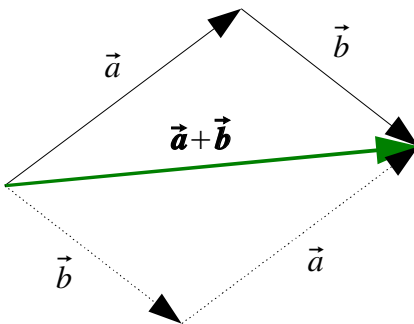
Definition:

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben.

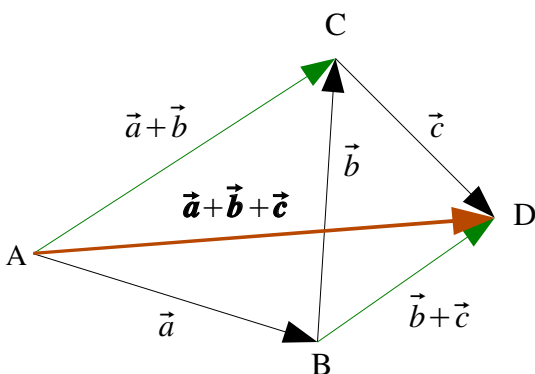
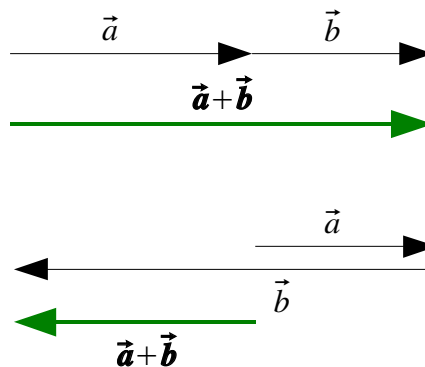
Addition und Subtraktion von Vektoren

Definition:

Um die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ zu erhalten, zeichnet man die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} so, dass der Anfangspunkt von \vec{b} mit dem Endpunkt von \vec{a} zusammenfällt. Der Summenvektor zeigt dann vom Anfangspunkt von \vec{a} zum Endpunkt von \vec{b} .



Spezialfall:

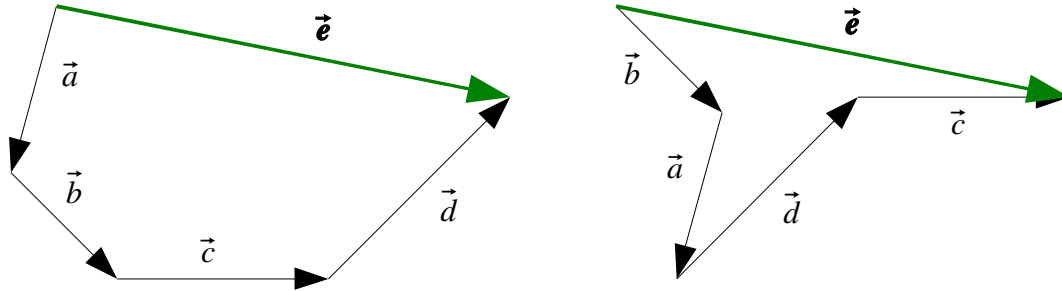


Gesetze:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	(Kommutativgesetz)
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	(Assoziativgesetz)

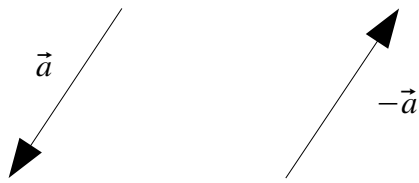
Daraus folgt, dass man in einer mehrgliedrigen Summe von Vektoren beliebige Vertauschungen und Zusammenfassungen vornehmen darf (wie bei reellen Zahlen).

z.B. $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{d} + \vec{c}$



Definition:

Ist \vec{a} ein Vektor, so heisst der Vektor mit derselben Länge, aber entgegengesetzter Richtung, der **KEHRVEKTOR** von \vec{a} . Er wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.



Aus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ folgt somit $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$

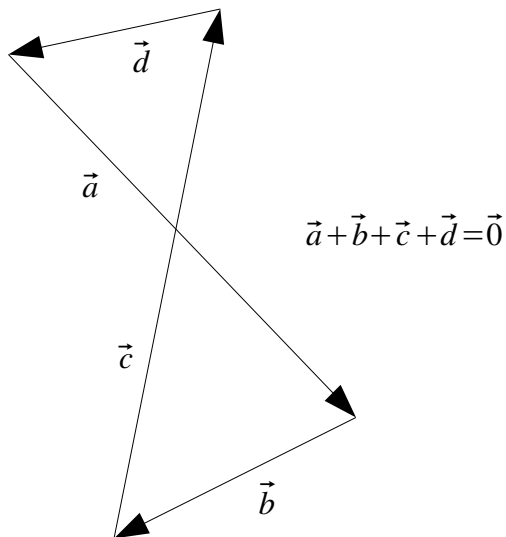
$$-(-\vec{a}) = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \text{ NULLVEKTOR (Länge 0, unbestimmte Richtung)}$$

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ und } -\vec{0} = \vec{0}$$

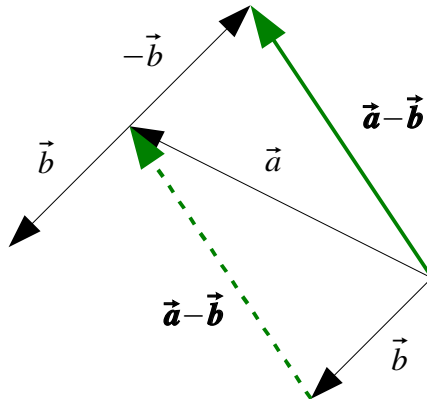
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Geschlossenes Vektorpolygon:



Definition:

Unter der Differenz $\vec{a}-\vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man den Vektor $\vec{a}+(-\vec{b})$.
Zu zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} gibt es somit stets genau einen Vektor \vec{c} , sodass $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ ist, nämlich den Vektor $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.



Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

$$2\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}$$

$$3\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$$

$$(-2)\vec{a}=-2\vec{a}$$

Definition:

Ist \vec{a} ein Vektor und x eine reelle Zahl, so versteht man unter $x\vec{a}$ den Vektor mit der $|x|$ -fachen Länge und mit der gleichen oder entgegengesetzten Richtung von \vec{a} , je nachdem x positiv oder negativ ist.

Speziell gilt also:

$$0\cdot\vec{a} = \vec{0}$$

$$1\cdot\vec{a} = \vec{a}$$

$$-1\cdot\vec{a} = -\vec{a}$$

$$x\cdot\vec{0} = \vec{0}$$

$$(-x)\vec{a} = -(x\vec{a})=x(-\vec{a})$$

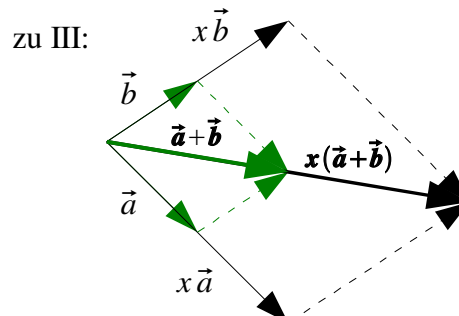
Diese Multiplikation ist also eine Streckung des Vektors \vec{a} von seinem Anfangspunkt aus um den Faktor x .

Gesetze:

$$\text{I. } (x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$$

$$\text{II. } (xy)\vec{a}=x(y\vec{a})$$

$$\text{III. } x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$$



Diese Gesetze haben zur Folge, dass man mit Vektoren rechnen kann wie mit reellen Zahlen.

$$\begin{aligned}\text{Beispiel: } 5\vec{a} + 2\vec{c} - 2(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) &= 5\vec{a} + 2\vec{c} + [-2(2\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c})] \\ &= 5\vec{a} + 2\vec{c} + (-2)[2\vec{a} + (-1)\vec{b} + \vec{c}] \\ &= 5\vec{a} + 2\vec{c} + (-4)\vec{a} + 2\vec{b} + (-2)\vec{c} \\ &= [5\vec{a} + (-4)\vec{a}] + 2\vec{b} + [2\vec{c} + (-2)\vec{c}] \\ &= 1\vec{a} + 2\vec{b} + 0\vec{c} \\ &= \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{0}\end{aligned}$$

$$\text{kurz: } 5\vec{a} + 2\vec{c} - 2(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 5\vec{a} + 2\vec{c} - 4\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

Kollineare und komplanare Vektoren

Definition:

Zwei Vektoren heissen **KOLLINEAR**, wenn sie zu einer einzigen Geraden parallel sind.

(Dabei wird der Nullvektor als zu jeder Geraden parallel betrachtet.)

Haben sie denselben Anfangspunkt, so liegen sie auf einer einzigen Geraden.

Jedes Vielfache $x\vec{a}$ eines Vektors \vec{a} (also auch $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$) ist mit \vec{a} kollinear, und umgekehrt ist jeder mit \vec{a} kollineare Vektor ein Vielfaches von \vec{a} .

Satz 1:

\vec{a} und \vec{b} sind dann und nur dann nicht kollinear, wenn die Gleichung $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ nur erfüllt ist für $x=y=0$.

Beweis:

a) \vec{a} und \vec{b} nicht kollinear und $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$

Annahme: z.B. $y \neq 0$

$$\text{also } \frac{x}{y}\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}, \text{ somit } \vec{b} = -\frac{x}{y}\vec{a}, \text{ also w\u00e4ren } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ kollinear, Widerspruch!}$$

b) Sind \vec{a} und \vec{b} kollinear, so ist zum Beispiel $\vec{b} = x\vec{a}$

$$\text{also } x\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}. \text{ Die Gleichung ist erf\u00fcllt f\u00fcr } y \neq 0 \text{ (} y = -1 \text{)} \quad (q. e. d.)$$

Definition:

Drei Vektoren heissen **KOMPLANAR**, wenn sie zu einer einzigen Ebene parallel sind.

(Dabei wird der Nullvektor als zu jeder Ebene parallel betrachtet.)

Haben sie denselben Anfangspunkt, so liegen sie auf einer einzigen Ebene.

Ausserdem: Jede Linearkombination ($x\vec{a} + y\vec{b}$) von \vec{a} und \vec{b} ist mit \vec{a} und \vec{b} komplanar.

Satz 2:

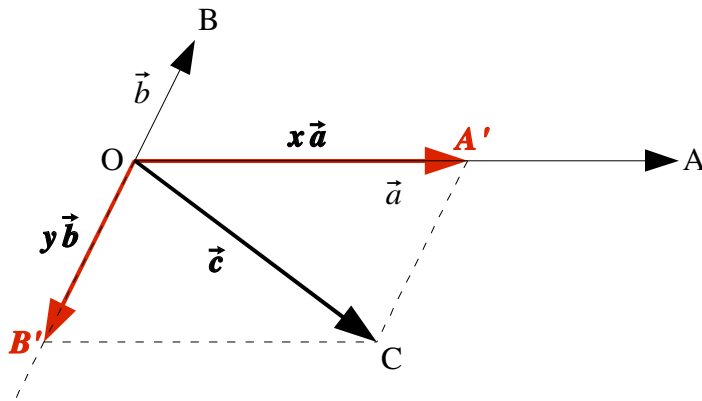
Sind \vec{a} und \vec{b} zwei nicht kollineare Vektoren, so l\u00e4sst sich jeder mit \vec{a} und \vec{b} komplanare Vektor \vec{c} eindeutig als Summe von zwei Vektoren, die mit \vec{a} bzw. \vec{b} kollinear sind, darstellen, d.h. als Linearkombination.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} heissen die **VEKTORIELLEN KOMponentEN**, die Zahlen x und y die **SKALAREN KOMponentEN** von \vec{c} nach \vec{a} und \vec{b} .

Beweis:

a) Zerlegung konstruktiv



$$\vec{c} = \vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

b) Diese Zerlegung ist eindeutig, denn wäre

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b} \text{ mit } x \neq x' \text{ oder } y \neq y',$$

so wäre

$$\vec{c} - \vec{c} = (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0} \text{ mit } x - x' \neq 0 \text{ oder } y - y' \neq 0,$$

also wären \vec{a} und \vec{b} kollinear nach Satz 1, Widerspruch!

(q. e. d.)

Satz 3:

\vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind dann und nur dann nicht komplanar, wenn die Gleichung $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ nur erfüllt ist für $x = y = z = 0$.

Beweis:

a) \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} nicht komplanar und $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$

Annahme: z.B. $z \neq 0$

also $\frac{x}{z}\vec{a} + \frac{y}{z}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, somit $\vec{c} = -\frac{x}{z}\vec{a} - \frac{y}{z}\vec{b}$, d. h. \vec{c} wäre als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} mit \vec{a} und \vec{b} komplanar. Widerspruch!

b) Sind \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} komplanar, so sind entweder \vec{a} und \vec{b} kollinear, also $\vec{b} = x\vec{a}$, also

$$x\vec{a} + (-1)\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}; \text{ oder dann sind } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ nicht kollinear, also nach Satz 2 } \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

also $x\vec{a} + y\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$. In jedem Fall gilt also eine Gleichung $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, in der nicht alle Zahlen x, y, z gleich 0 sind.

(q. e. d.)

Satz 4:

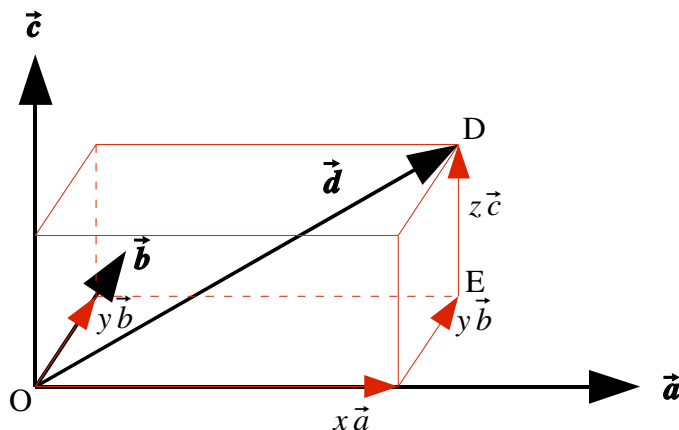
Sind \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} drei nicht komplanare Vektoren, so kann jeder beliebige Vektor \vec{d} eindeutig in drei Summanden zerlegt werden, die zu den einzelnen gegebenen Vektoren kollinear sind. (D. h.: er ist eine Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .)

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Die Vektoren $x\vec{a}$, $y\vec{b}$, $z\vec{c}$ heissen wieder die VEKTORIELLEN, die Zahlen x, y und z die SKALAREN KOMPONENTEN von \vec{d} nach \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .

Beweis:

a) Zerlegung konstruktiv



$$\vec{d} = \vec{OE} + \vec{ED} = (x\vec{a} + y\vec{b}) + z\vec{c}$$

b) Diese Zerlegung ist eindeutig, denn wäre

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c} \text{ mit } x \neq x', y \neq y' \text{ oder } z \neq z',$$

so wäre

$$\vec{d} - \vec{d}' = (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} + (z - z')\vec{c} = \vec{0} \text{ mit } x - x' \neq 0, y - y' \neq 0 \text{ oder } z - z' \neq 0,$$

also wären \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} komplanar nach Satz 3, Widerspruch!

(q. e. d.)

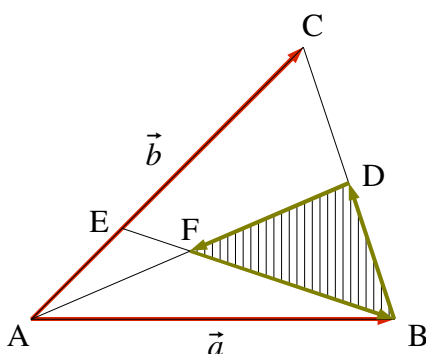
Bemerkung:

Vektoren heißen **LINEAR UNABHÄNGIG**, wenn keiner von ihnen eine Linearkombination der andern ist, sonst **LINEAR ABHÄNGIG**. Drei Vektoren in der Ebene und vier Vektoren im Raum sind also stets linear abhängig.

Beispiel:

Geg.: $\triangle ABC$ und Punkte E und D mit $\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{BC}$, $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$. Die Transversalen AD und BE schneiden sich in F .

Ges.: Die Bruchteile x und y , die die Strecken \vec{DF} und \vec{EF} von \vec{AB} bzw. \vec{BE} ausmachen.



$$\vec{DF} = x\vec{DA}, \vec{EF} = y\vec{EB}$$

$$\vec{a} := \vec{AB}, \vec{b} := \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{BC} = \vec{b} - \vec{a}, \vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{DA} = \vec{DB} + \vec{BA} = -\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{b}, \vec{EB} = \vec{EA} + \vec{AB} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{BD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{DF} = x\vec{DA} = -\frac{1}{2}x\vec{a} - \frac{1}{2}x\vec{b}$$

$$\vec{FB} = \vec{EB} - \vec{EF} = \vec{EB} - y\vec{EB} = (1-y)\vec{EB} = (1-y)\vec{a} - \frac{1}{3}(1-y)\vec{b}$$

Da diese drei Vektoren ein geschlossenes Vektordreieck bilden, ist

$$\vec{BD} + \vec{DF} + \vec{FB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}x\vec{a} - \frac{1}{2}x\vec{b} + (1-y)\vec{a} - \frac{1}{3}(1-y)\vec{b} = \vec{0}, \text{ also } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - y\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)\vec{b} = \vec{0}$$

Da \vec{a} und \vec{b} nicht kollinear sind, folgt nach Satz 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - y = 0 \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$$